Correction du DM n°1

Exercice 1

1. (a) Soit $n \geq 3$ un entier. f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$.

   De plus, on a

   - $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$ par somme
   - $f_n(n) = n - n\ln(n) = n(1-\ln n)$
   - $f_n(x) = x\left(1 - \dfrac{n\ln x}{x}\right)$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{n\ln x}{x} = 0$ donc par opérations de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

   On en déduit le tableau suivant :

x	0		n		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$x-n$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln n)$	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) L'énoncé donne e < 3 donc pour $n \geq 3$ on a $\ln(n) > \ln(e) = 1$.

   Ainsi, $f_n(n) = n(1-\ln n) < 0$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, on a $0 \in [f_n(n)\,;\ \lim\limits_{x\to 0} f_n(x)]$ et $0 \in [f_n(n)\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)]$.

   De plus, f_n est strictement décroissante sur $]0,n]$ et strictement croissante sur $[n,+\infty[$ d'après la question précédente.

   Enfin, f est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,n[$ et une unique solution sur $]n,+\infty[$, donc exactement deux solutions sur $]0,+\infty[$.

2. On a $f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1$, et $f_n(n) < 0$ d'après la question précédente. On a donc $f_n(1) > 0 > f_n(n)$, et comme u_n est l'unique solution de $f_n(x) = 0$ comprise entre 0 et n on a donc $1 \leq u_n \leq n$.
3. Soit $n \geq 3$. On a $f_{n+1}(u_n) = u_n - (n+1)\ln(u_n) = \underbrace{u_n - n\ln(u_n)}_{=0} - \ln(u_n) = -\ln(u_n)$

   Or $1 \leq u_n$ donc $\ln(u_n) \geq 0$. Ainsi, $f_{n+1}(u_n) \leq 0$.
4. Soit $n \geq 3$. On a $f_{n+1}(u_n) \leq 0 \leq f_{n+1}(u_{n+1})$ d'après la question précédente, avec $u_n \in [1,n] \subset [1,n+1]$ et $u_{n+1} \in [1,n+1]$. Or f_{n+1} est décroissante sur $[1,n+1]$ d'après la question 1.a donc $u_n \geq u_{n+1}$.

   On en déduit que (u_n) est décroissante.
5. (u_n) est décroissante d'après la question 4 et minorée par 1 d'après la question 2. On en déduit que u_n converge vers un réel ℓ.

   Comme $\forall n \geq 3$, $u_n \geq 1$ on a $\ell \geq 1$ par passage à la limite.
6. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\ell > 1$.

   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell > 1$.

   Or u_n vérifie $u_n = n\ln(u_n)$. On en déduit que $u_n \geq n\ln(\ell)$

   Or $\ln(\ell) > 0$ car $\ell > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ell) = +\infty$. Par comparaison, on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ce qui contredit le résultat de la question 3.

On en conclut que $\ell = 1$.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k \leq n$ donc $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

   On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

   Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ on en déduit par comparaison que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.
2. Pour tout $a, b > 0$ on a :
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a - b$$
   d'où
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$
   car $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - S_{n+1} + S_n \\
&= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= 2\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{2\sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$
   donc (u_n) est croissante.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= 2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} - S_{n+1} + S_n \\
&= 2\frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{2\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} \\
&= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$
   donc (v_n) est décroissante.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 0$ car $n+1 \geq n$, donc $v_n \geq u_n$
5. Comme (u_n) est croissante on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$.

   Comme (v_n) est décroissante on a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$.

   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$
   donc (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) est minorée par u_0. D'après le théorème de la limite monotone on en déduit que (u_n) et (v_n) convergent.
6. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = 2\sqrt{n+1} - S_n - 2\sqrt{n} + S_n = 2\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

   Si on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, on en déduit que $\ell' - \ell = 0$ par somme de limites donc que $\ell = \ell'$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2\sqrt{n} - u_n$ donc $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{2\sqrt{n}}{n} - \dfrac{u_n}{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \dfrac{u_n}{n}$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0$.

   De même, $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = 2 - \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$ par opérations.
8. On remarque que $S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k'=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k'}}$ en posant $k' = k - n$.

   On a donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(S_{2n} - S_n) = \dfrac{S_{2n}}{\sqrt{n}} - \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{2}S_{2n}}{\sqrt{2n}} - \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.

   Or d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} = 2$, donc
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$